

**Απλή Αρμονική Ταλάντωση και Δυναμική
Ασκήσεις με «Χάσιμο Επαφής»**

1. Ένας δίσκος μάζας $m_1=6\text{kg}$ είναι δεμένος στο ελεύθερο άκρο του **κατακόρυφου** ελατηρίου σταθεράς $k=1000\text{N/m}$. Πάνω στην δίσκο ισορροπεί σώμα μάζας $m_2=4\text{kg}$. Απομακρύνουμε το σύστημα κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας του και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο, με αποτέλεσμα να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. (θετική φορά προς τα κάτω κατακόρυφα)

- i) Να βρείτε τη σταθερά επαναφοράς και τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συστήματος,
 ii) Για τις σταθερές επαναφοράς D_1, D_2 του δίσκου και του σώματος αντίστοιχα να αποδείξετε τη σχέση $D_1 + D_2 = k$.
 iii) Για απομάκρυνση $x=+0,1\text{m}$ να βρείτε:
 α) τη δύναμη επαναφοράς στον δίσκο και τη δύναμη επαναφοράς στο σώμα,
 β) τη δύναμη που ασκεί ο δίσκος στο σώμα και τη δύναμη που ασκεί το ελατήριο στον δίσκο

(Απάντηση: i) $\sqrt{10}$, iii) α) -6 και -4N β) 44N και 110N)

2. Μία οριζόντια επιφάνεια κάνει **κατακόρυφη** απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T=2\pi\text{s}$. Πάνω στην επιφάνεια βρίσκεται ένα σώμα μάζας m .

- i) Να αποδείξετε ότι αποκλείεται το σώμα να χάσει την επαφή του με την επιφάνεια όσο αυτή κινείται κάτω από τη θέση ισορροπίας της.
 ii) Να βρείτε το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης, ώστε το σώμα να μην χάσει την επαφή του με την επιφάνεια.
 Δίνεται : $g=10\text{ m/s}^2$

(Απάντηση: i) , ii) $A_{\max}=10\text{m}$)

3. Σώμα μάζας $m_1=4\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε **κατακόρυφο** ελατήριο σταθεράς $k=120\text{N/m}$. Άλλο σώμα μάζα $m_2=2\text{kg}$ τοποθετείται πάνω από το σώμα μάζας m_1 . Να βρείτε:

- i) το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης που θα κάνει το σύστημα των δύο σωμάτων,
 ii) τον χρόνο από τη στιγμή που τοποθετήσαμε το σώμα μάζας m_2 μέχρι τη στιγμή που το σύστημα των σωμάτων φτάνει στη θέση της μέγιστης συσπίρωσης του ελατηρίου.
 iii) την ενέργεια της ταλάντωσης,
 iv) τη δύναμη που δέχεται το σώμα μάζας m_2 από το σώμα μάζας m_1 στη θέση της μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου.
 Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

(Απάντηση: i) $A = \frac{1}{6}\text{ m}$ και $T = \frac{\pi\sqrt{5}}{5}\text{ sec}$, ii) $T = \frac{\pi\sqrt{5}}{10}\text{ sec}$, iii) $E = \frac{5}{3}\text{ J}$, iv) $F = \frac{80}{3}\text{ N}$)

4. **Μία οριζόντια επιφάνεια κάνει κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A=1\text{m}$ Και περίοδο $T=\pi\text{ s}$. Πάνω στην επιφάνεια βρίσκεται σώμα μάζας $m=10\text{kg}$ και τη χρονική στιγμή $t=0$ η επιφάνεια περνά από τη θέση ισορροπίας της και κινείται προς τα πάνω.

- i) Ποια είναι η σταθερά επαναφοράς του σώματος μάζας m και πόση είναι η δύναμη που δέχεται το σώμα από την επιφάνεια στη θέση ισορροπίας της;
 ii) Να βρείτε πώς μεταβάλλεται η δύναμη F που ασκεί η επιφάνεια στο σώμα σε συνάρτηση με τον χρόνο καθώς και σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας. στη συνέχεια να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $F=f(t)$ και $F=f(x)$.
 Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

(Απάντηση: i) $D_1= 40\text{N/m}$ και $F=100\text{N}$, ii) $F=100-40\eta\mu 2t$ και $F=100-40x$)

5. Δύο σώματα με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=3\text{kg}$ εφάπτονται μεταξύ τους πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα μάζας m_1 είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου. Το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta l = 0,3\text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε τα σώματα ελεύθερα. Τη στιγμή που το σώμα μάζας m_2 αποχωρίζεται από το σώμα μάζας m_1 έχει ταχύτητα $u_2=1,5\text{m/s}$.

- Σε ποια θέση αποχωρίζονται τα δύο σώματα;
- Για πόσο χρονικό διάστημα τα δύο σώματα ήταν σε επαφή;
- Πόσο είναι το πλάτος ταλάντωσης που θα κάνει το σώμα μάζας m_1 ;
- Πόσο θα απέχουν τα δύο σώματα τη στιγμή που το σώμα μάζας m_1 θα βρίσκεται για πρώτη φορά στη θέση όπου το ελατήριο έχει τη μέγιστη συσπείρωση του;

(Απάντηση: i) στο Φ.Μ. , ii) $\Delta t = \frac{\pi}{10}\text{ sec}$, iii) $A=0,14\text{m}$, iv) $d=0,225\pi+0,15\text{ m}$)

6. Δύο σώματα με μάζες $m_1=3\text{kg}$ και $m_2=5\text{kg}$ είναι κολλημένα μεταξύ τους με κόλλα η οποία αντέχει σε δυνάμεις μέχρι $12,5\text{N}$. Το σώμα μάζας m_1 είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{N/m}$. Στη θέση ισορροπίας των σωμάτων με μία στιγμιαία ώθηση δίνουμε στο σύστημα αρχική ταχύτητα $u_0=1\text{m/s}$ προς τ' αριστερά. Να βρείτε:

- τη σταθερά επαναφοράς κάθε σώματος
- τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου,
- σε ποια θέση θα χαθεί η επαφή μεταξύ των σωμάτων,
- το πλάτος ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 μετά το χάσιμο της επαφής.

(Απάντηση: i) $D_1 = 75\text{N/m}$ $D_2 = 125\text{N/m}$, ii) $\Delta l = 0,2\text{m}$, iii) $x_1 = 0,1\text{m}$, iv) $A = 0,1\sqrt{\frac{17}{8}}\text{ m}$)

7. Στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k=800\text{N/m}$ ισορροπεί δίσκος μάζας $M=6\text{kg}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ τοποθετούμε πάνω στον δίσκο σώμα μάζας $m=2\text{kg}$.

- Να αποδείξετε ότι το σύστημα δίσκος-σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδο της T και την αρχική της φάση φ_0 .
- Να γράψετε τις εξισώσεις σε συνάρτηση με τον χρόνο και τις εξισώσεις σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του συστήματος των μεγεθών :
 - ταχύτητα δίσκου,
 - επιτάχυνση σώματος,
 - δύναμη ελατηρίου,
 - δύναμη που ασκεί ο δίσκος στο σώμα.

Στη συνέχεια να κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Δίνεται $g=10\text{ m/s}^2$

(Απάντηση: i) $T=0,2\pi\text{ sec}$ $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{ rad}$, ii) $x = \frac{1}{40}\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})$)

8. Πάνω σε ένα δίσκο , μάζας $m_\Delta=0,1\text{kg}$ υπάρχει σώμα μάζας $m_\sigma=0,3\text{kg}$. Ο δίσκος είναι δεμένος στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k=40\text{N/m}$. Απομακρύνουμε το σύστημα κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Να βρείτε:

- τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης,
- τις σταθερές επαναφοράς D_Δ και D_σ του δίσκου και του σώματος αντίστοιχα. Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος δίσκου –σώματος τι σχέση έχει με τις σταθερές D_Δ και D_σ ;
- τη μέγιστη τιμή A_{\max} του πλάτους της απλής αρμονικής ταλάντωσης που μπορεί να εκτελεί ο δίσκος χωρίς να χάνει το σώμα την επαφή με αυτόν. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

(Απάντηση: i) $\omega=10\text{rad/sec}$, ii) $D_{\sigma\Delta} = D_\sigma + D_\Delta$, iii) $A_{\max} = 10\text{ cm}$)

9. Ένας δίσκος έχει μάζα $M=0.6\text{kg}$ και είναι δεμένος σε ελατήριο το οποίο έχει σταθερά $k=100\text{N/m}$. Πάνω στον δίσκο υπάρχει σώμα μάζας $m=0,4\text{ kg}$. Να βρείτε:

- την περίοδο T της ταλάντωσης που μπορεί να κάνει το σύστημα,
 - το μέγιστο πλάτος A_{\max} της ταλάντωσης, ώστε το σώμα να βρίσκεται συνέχεια σ' επαφή με τον δίσκο,
 - την απομάκρυνση x_1 στη θέση όπου θα αποσπασθεί το σώμα, αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A=0,2\text{m}$
 - την ταχύτητα του u_1 τη στιγμή της απόσπασης, αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A=0,2\text{m}$.
- Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

(Απάντηση: i) $T=0,2\pi\text{ sec}$, ii) $A_{\max}=10\text{ cm}$, iii) $x=0,1\text{m}$, iv) $u=\sqrt{3}\text{ m/s}$)

10. Σώμα μάζας $m=0,2\text{ kg}$, είναι τοποθετημένο πάνω στην οριζόντια επιφάνεια, που εκτελεί κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T=2\text{s}$ και πλάτος $A=0,25\text{ m}$

- i) Να βρείτε τη δύναμη που ασκεί η επιφάνεια στο σώμα στις θέσεις:

α) $x=0$ β) $x=0,25\text{m}$ γ) $x=+0,25\text{m}$

- Για ποια τιμή του πλάτους ταλάντωσης το σώμα θα εγκαταλείψει οριακά την επιφάνεια όταν η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T=2\text{s}$;
 - Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα της ταλάντωσης για την οποία το σώμα δεν θα εγκαταλείψει την επιφάνεια όταν το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A=0.25\text{m}$;
- Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και $\pi^2=10$.

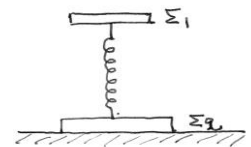
(Απάντηση: i) α) 2N β) $2,5\text{N}$ γ) $1,5\text{ N}$ ii) 1m iii) 1hz)

11. Το ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{N/m}$ είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Στο άλλο άκρο του είναι σταθερά συνδεδεμένος δίσκος μάζας $M=1,5\text{ kg}$. Πάνω στον δίσκο είναι τοποθετημένο σώμα μάζας $m=0,5\text{kg}$. Το σύστημα ισορροπεί. Πιέζουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $\Delta l = \frac{\sqrt{5}}{10}\text{m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο.

- Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εγκαταλείψει τον δίσκο.
 - Ποια είναι η ταχύτητα και ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος μάζας m τη στιγμή που εγκαταλείπει τον δίσκο;
 - Σε πόσο ύψος θα φτάσει το σώμα πάνω από τη θέση στην οποία εγκαταλείπει τον δίσκο;
- Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και $g=10\text{ m/s}^2$.

(Απάντηση: ii) $u=-2\text{m/s}$ $a=10\text{m/s}^2$ iii) $0,2\text{m}$)

12. Τα δύο σώματα του επόμενου σχήματος, με μάζες $m_1 = 2\text{kg}$ και $m_2=4\text{kg}$, είναι δεμένα στα ελεύθερα άκρα του κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{N/m}$. Με το χέρι μας κατεβάζουμε το σώμα μάζας m_1 κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $x_2=30\text{cm}$, μέχρι τη θέση Γ, και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο.



- Να βρείτε στη θέση Γ τη συμπίεση του ελατηρίου και τη δύναμη που δέχεται το σώμα μάζας m_1 από το ελατήριο,
 - Όταν το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται στην ανώτερη θέση, ποιο είναι το μέτρο και ποια η φορά της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο;
 - Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της δύναμης που δέχεται το σώμα μάζας m_2 από το δάπεδο.
- Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

(Απάντηση: i) 80N iii) 120N)

13. Στο παραπάνω σχήμα της 7.17 ασκήσης τα σώματα με μάζες $m_1=0,2\text{kg}$ Και $m_2=0,8\text{kg}$ ηρεμούν δεμένα στα άκρα του κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K=100\text{N/m}$. Να βρείτε πόσο το πού μπορούμε να σπρώξουμε το σώμα μάζας m_1 προς τα κάτω ώστε, όταν το αφήσουμε ελεύθερο, να μην χάσει την επαφή με το δάπεδο το σώμα μάζας m_2 .

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

(Απάντηση: **0,1m**)

14. Σώμα μάζας $M=6\text{kg}$ είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζώντιου ελατηρίου, σταθεράς $k=100\text{N/m}$, και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στο σώμα μάζας M υπάρχει σώμα μάζας $m=4\text{kg}$. Απομακρύνουμε το σύστημα των σωμάτων από τη θέση ισορροπίας του στη διεύθυνση του ελατηρίου και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο.

i) Να βρείτε την περίοδο T της ταλάντωσης του συστήματος,

ii) Αν η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής μεταξύ των σωμάτων $T_{\text{στ,max}}=40\text{N}$, να βρείτε το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης, ώστε το σώμα μάζας m να μην κινείται σε σχέση με το σώμα μάζας M .

(Απάντηση: **i)0,2π s ii)D₂A**)

15. Ο συμπαγής μεταλλικός κύλινδρος του επόμενου σχήματος, με πυκνότητα $d=2\cdot 10^4\text{kg/m}^3$, ύψος $h=0,1\text{m}$ και εμβαδόν βάσης $S=5\cdot 10^{-4}\text{m}^2$, είναι κρεμασμένος από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου σταθεράς $k=350\text{N/m}$. Το δοχείο περιέχει υγρό που έχει πυκνότητα $d_{\text{υγ}}=10^4\text{kg/m}^3$ και ο κύλινδρος ισορροπεί βυθισμένος κατά το μισό του.

i) Να βρείτε τη δύναμη του ελατηρίου όταν ο κύλινδρος ισορροπεί.

ii) Να αποδείξετε ότι αν μετατοπίσουμε λίγο τον κύλινδρο κατακόρυφα και στη συνέχεια τον αφήνουμε ελεύθερο, ο κύλινδρος θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρούμε ότι η στάθμη του υγρού παραμένει σταθερή και ότι οι τριβές είναι αμελητέες.

iii) Να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης του κυλίνδρου.

Δίνεται: $g=10\text{m/s}^2$

(Απάντηση: **ii)7,5N iii) $\frac{10}{\pi}\text{hz}$**)