ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΛΟΓΩ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Ένα στερεό που στρέφεται γύρω από άξονα έχει κινητική ενέργεια. Για τον υπολογισμό της θεωρούμε ότι το στερεό αποτελείται από ένα σύνολο υλικών σημείων. Κάθε υλικό σημείο έχει, λόγω της περιστροφής του στερεού, κάποια κινητική ενέργεια. Επομένως, η κινητική ενέργεια του στερεού θα βρεθεί αθροίζοντας όλες τις επιμέρους κινητικές ενέργειες των υλικών σημείων που το απαρτίζουν.

Ένα υλικό σημείο μάζας m που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ έχει κινητική ενέργεια:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Άρα, η κινητική ενέργεια του στερεού λόγω της στροφικής του κίνησης ισούται με:

$$K_{\pi\varepsilon\rho} = K_1 + K_2 + \dots$$

Από την οποία έχουμε:

$$K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \dots$$

Καθώς το στερεό περιστρέφεται γύρω από τον άξονα περιστροφής του, τα υλικά σημεία που το αποτελούν εκτελούν κυκλικές κινήσεις. Επομένως ισχύει:

$$\upsilon_1 = \omega r_1 \ , \quad \upsilon_2 = \omega r_2 \ , \quad \dots$$

όπου:

υ_i: γραμμικές ταχύτητες υλικών σημείων $\left(\frac{m}{s}\right)$

ω: γωνιακή ταχύτητα στερεού $\left(\frac{rad}{s}\right)$

r_i: ακτίνες κυκλικών τροχιών των υλικών σημείων (m)

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}m_1(\omega r_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\omega r_2)^2 + \dots \Rightarrow K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}m_1\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 r_2^2 + \dots$$

Επειδή η γωνιακή ταχύτητα του στερεού ω είναι κοινή για όλα τα υλικά σημεία που το αποτελούν, έχουμε:

$$K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}\,\omega^2\,(\ m_1 r_1^2 + m_2\omega^2 r_2^2 + \dots\ )$$

Το άθροισμα $m_1 r_1^2 + m_2\omega^2 r_2^2 + \dots$ είναι η ροπή αδράνειας του στερεού, επομένως:

$$K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2$$

Κινητική ενέργεια στερεού στη μεταφορική κίνηση

Ένα στερεό σώμα που εκτελεί μεταφορική κίνηση έχει κινητική ενέργεια λόγω της μεταφορικής του κίνησης ίση με το άθροισμα των επιμέρους κινητικών ενεργειών των υλικών σημείων από τα οποία αποτελείται:

$$K_{\mu\varepsilon\tau} = K_1 + K_2 + \dots = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \dots$$

Στη μεταφορική κίνηση, όλα τα υλικά σημεία έχουν ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας υ_{cm}.
Επομένως:

$$K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{cm}^2 + \dots = \frac{1}{2}\,\upsilon_{cm}^2\,(\ m_1 + m_2 + \dots\ )$$

και τελικά:

$$K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2$$

όπου: M: μάζα στερεού (kg)

<u>Παρατήρηση</u>: Τα μεγέθη Ι και ω της στροφικής κίνησης αντιστοιχούν στα μεγέθη Μ και υ_{cm}, και ο τύπος $K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2} I\ \omega^2$ της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής αντιστοιχεί στον τύπο $K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2} M\upsilon_{cm}{}^2$ της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς.

Κινητική ενέργεια στερεού στη σύνθετη κίνηση

Αν ένα στερεό εκτελεί σύνθετη κίνηση, έχει κινητική ενέργεια λόγω της μεταφορικής κίνησής του και κινητική ενέργεια λόγω της στροφικής κίνησής του. Η συνολική κινητική ενέργειά του υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2} M\upsilon_{cm}{}^2 + \frac{1}{2} I\ \omega^2$$

Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες προβλημάτων:

1. **Σώματα που περιστρέφονται περί σταθερό άξονα περιστροφής, δηλαδή εκτελούν μόνο περιστροφική κίνηση.**
2. **Σώματα που εκτελούν ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική κίνηση, δηλαδή ο άξονας γύρω από τον οποίο περιστρέφονται μετατοπίζεται.**

Η πρώτη μας ενέργεια είναι να διακρίνουμε σε ποια από τις δύο κατηγορίες ανήκει το πρόβλημα.

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΠΕΡΙ ΣΤΑΘΕΡΟ ΑΞΟΝΑ

1. **Απλές εφαρμογές υπολογισμών περιστροφικής κινητικής ενέργειας**

Η περιστροφική κινητική ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{K = \frac{1}{2} I\ \omega^2}$$

Ι: η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του στερεού.
ω = 2πf = 2π/Τ: η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

2. **Υπολογισμοί μεταβολής περιστροφικής κινητικής ενέργειας**

i) Άμεσος υπολογισμός μέσω της τελικής και της αρχικής περιστροφικής κινητικής ενέργειας

$$\mathbf{\Delta K_{\pi\varepsilon\rho} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} I\ \omega_2{}^2 + \frac{1}{2} I\ \omega_1{}^2}$$

Μπορεί να χρειαστεί να υπολογίσουμε την τελική γωνιακή ταχύτητα ω_2 μέσω της γωνιακής επιτάχυνσης.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{dt}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση μπορεί να πρέπει να υπολογιστεί από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης:

$$\Sigma\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\Sigma\tau}{I}$$

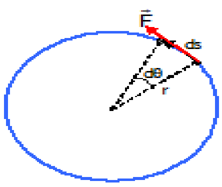
ii) Υπολογισμός μέσω του έργου των ροπών από το θεώρημα έργου – ενέργειας

$$\mathbf{\Sigma w = \Delta K_{\pi\varepsilon\rho}}$$

Το έργο των ροπών υπολογίζεται από τη σχέση: $W=\tau\Delta\theta$ αν η ροπή είναι σταθερή.

- Η φυσική σημασία του προσήμου του έργου είναι ότι αν είναι θετικό αυξάνει, ενώ αν είναι αρνητικό ελαττώνει την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής ενός στερεού.
- Το "έργο δύναμης" και το "έργο ροπής δύναμης" είναι ταυτόσημες έννοιες.

Απόδειξη του τύπου W=τΔθ (για σταθερή ροπή δύναμης)



Με βάση το παρακάτω σχήμα, αν ο φορέας μιας δύναμης απέχει απόσταση R από τον άξονα περιστροφής και η δύναμη στρέφει το στερεό κατά γωνία dθ σε χρόνο dt, τότε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά τόξο:

$$ds = d\theta \cdot R$$

Σε αυτή την απειροστά μικρή στροφή η δύναμη μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και το έργο της να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$dW = F \cdot ds \Rightarrow dW = F \cdot d\theta \cdot R$$

και επειδή $\tau = F \cdot R$:

$$dW = \tau \cdot d\theta$$

Το συνολικό έργο της δύναμης σε στροφή κατά γωνία θ είναι:

$$W = \Sigma dW \Rightarrow W = \Sigma(\tau \cdot d\theta)$$

Επειδή η ροπή της δύναμης είναι σταθερή: $W = \tau \cdot \Sigma d\theta \Rightarrow W = \tau \cdot \theta$

Η ροπή $\vec{\tau}$ (ή το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών για περισσότερες από μία δυνάμεις) υπολογίζεται κατά τα γνωστά.

Η γωνία στροφής θ μπορεί να υπολογιστεί

α) Μέσω του αριθμού των περιστροφών: $\theta = N \cdot 2\pi$

β) Από τη γραφική παράσταση $\omega = f(t)$ όπου ισούται με το περικλειόμενο εμβαδό μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων.

3. **Εφαρμογές της Α.Δ.Μ.Ε. σε περιπτώσεις όπου το κέντρο μάζας του στρεφόμενου περί άξονα στερεού μετατοπίζεται σε κατακόρυφο επίπεδο.**

Για την εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. πρέπει να επιλέξουμε επίπεδο αναφοράς ($U_{βαρ} = 0$).
Συνήθως επιλέγουμε εκείνο που διέρχεται από την κατώτερη θέση του κέντρου μάζας.

Ο ΑΞΟΝΑΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΖΕΤΑΙ – ΤΟ ΣΤΕΡΕΟ ΕΚΤΕΛΕΙ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

1. **Απλές εφαρμογές υπολογισμών κινητικής ενέργειας**

Η κινητική ενέργεια του στερεού είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής και λόγω περιστροφικής κίνησης:

$$\mathbf{K = K_{μετ} + K_{περ} \Rightarrow K = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2}$$

2. **Εφαρμογές της Α.Δ.Μ.Ε. σε περιπτώσεις όπου το κέντρο μάζας μετατοπίζεται έτσι ώστε να μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια βαρύτητας**

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. σε ασκήσεις όπου το στερεό (κύλινδρος, σφαίρα,…) κυλάει σε κεκλιμένο επίπεδο ή πέφτει κατακόρυφα περιστρεφόμενο με τη βοήθεια νήματος και θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του στερεού ($\vec{\upsilon}_{cm}$, $\vec{\omega}$) μετά από κάποια μετατόπιση.

Σε γενικές γραμμές, για τον υπολογισμό της ταχύτητας του κέντρου μάζας εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε., Αν σε ένα στερεό, το οποίο εκτελεί στροφική ή σύνθετη κίνηση, οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές (διατηρητικές) τότε η μηχανική ενέργεια του στερεού διατηρείται:

$$E_{μηχ} = E'_{μηχ}$$

Δηλαδή: $K + U_{ολ} = K' + U'_{ολ}$ **και για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης (α_{cm}) του κέντρου μάζας επιλύουμε το σύστημα που προκύπτει από την εφαρμογή:**

i) του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης για την περιστροφή ($\Sigma\tau = I\alpha$) και

ii) του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής ($\Sigma F = m\alpha_{cm}$).

Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας από την Α.Δ.Μ.Ε. και στη συνέχεια με απαλοιφή χρόνου από τις εξισώσεις της κινηματικής ($\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t$ και $s = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2$) να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Φυσικά, ισχύουν οι σχέσεις μεταξύ των μεγεθών της μεταφορικής και της περιστροφικής κίνησης ($\upsilon_{cm} = \omega R$, $\alpha_{cm} = \alpha R$)

Στιγμιαία ισχύς δύναμη

Στιγμιαία ισχύς δύναμης (ή ροπής δύναμης, ή χρονικός ρυθμός μεταβολής έργου δύναμης, ή χρονικός ρυθμός μεταβολής έργου ροπής)

Είναι γνωστό ότι ο χρονικός ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους Α είναι $\frac{dA}{dt}$. Στην περίπτωση του έργου δύναμης (ή ροπής δύναμης) ο χρονικός ρυθμός μεταβολής υπολογίζεται ως εξής:

Από τον τύπο W=τθ έχουμε:

$$W=\tau\theta \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{και επειδή} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \ :$$

$$\frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega \Rightarrow P = \tau \cdot \omega$$

Μέση Ισχύς δύναμης (ή ροπής δύναμης)

Αν μια δύναμη σε χρόνο Δt έχει προσφέρει έργο $W_{ολ}$, τότε η μέση ισχύς δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{P} = \frac{W_{ολ}}{\Delta t}$$

Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας στη στροφική κίνηση

Όμοια με πριν, ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται ως εξής:

$$dK = dW_{ολ} \ \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dK}{dt} = P_{ολ}$$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega$$

Θεώρημα έργου - ενέργειας στη στροφική κίνηση

Είναι γνωστό ότι στη μεταφορική κίνηση το έργο των δυνάμεων σχετίζεται άμεσα με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος, σύμφωνα με τη σχέση: $\Delta K = W_{ολ}$. Ποια είναι η σχέση της μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός στερεού και του έργου των δυνάμεων στη στροφική κίνηση;

Η ροπή μιας δύναμης μεταβάλλει την κινητική ενέργεια του περιστρεφόμενου στερεού κατά ποσότητα ίση με το έργο της. Αν στο στερεό ασκούνται πολλές ροπές, τότε το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που ασκούνται στο στερεό ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής του στερεού:

$$\Delta K_{περ} = W_{ολ} \qquad \text{ή} \qquad \frac{1}{2}I\omega_{τελ}^2 - \frac{1}{2}I\omega_{αρχ}^2 = W_{ολ}$$

Θεώρημα έργου - ενέργειας στη σύνθετη κίνηση

$$\Delta K = W_{ολ}$$

$$\text{ή} \ \left(\frac{1}{2}Mu_{cm,τελ}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{τελ}^2\right) - \left(\frac{1}{2}Mu_{cm,αρχ}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{αρχ}^2\right) = W_{ολ}$$

όπου:

M: μάζα στερεού (kg)

I: ροπή αδράνειας στερεού ως προς ελεύθερο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας ($kg \cdot m^2$)

$W_{ολ}$: συνολικό έργο δυνάμεων (J)

$u_{cm,αρχ}$, $u_{cm,τελ}$: αρχική και τελική ταχύτητα λόγω μεταφοράς του στερεού $\left(\frac{m}{s}\right)$

$\omega_{αρχ}$, $\omega_{τελ}$: αρχική και τελική γωνιακή ταχύτητα λόγω περιστροφής του στερεού $\left(\frac{rad}{s}\right)$

- Στην κύλιση ενός στερεού, η στατική τριβή $\vec{T}_{στ}$ δεν προσφέρει, ούτε αφαιρεί μηχανική ενέργεια διότι ασκείται στο (στιγμιαία ακίνητο) σημείο επαφής με το οδόστρωμα: $W_{T_{στ}} = 0$.
- Στην κατακόρυφη κίνηση ενός γιο-γιο, του οποίου το νήμα είναι ακλόνητα στερεωμένο στην ελεύθερη άκρη του, η τάση του νήματος $\vec{N}$ δεν προσφέρει, ούτε αφαιρεί μηχανική ενέργεια διότι ασκείται στο (στιγμιαία ακίνητο) σημείο επαφής του κυλίνδρου του γιο-γιο με το ελεύθερο νήμα: $W_N=0$.