ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

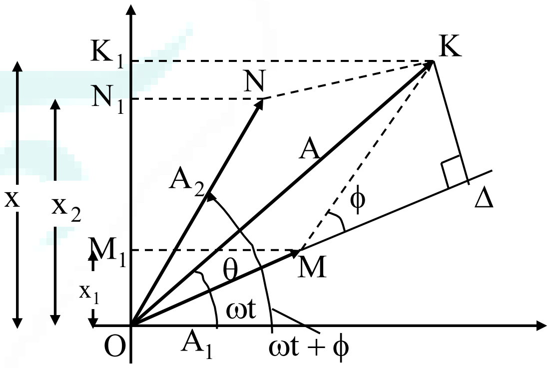
Αν αναγκάσουμε ένα σώμα με κάποιο μηχανικό τρόπο να εκτελέσει ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες ταλαντώσεις, η κίνηση που θα κάνει τελικά θα είναι η συνισταμένη αυτών των ταλαντώσεων (π.χ. το τύμπανο του αυτιού μας, όταν σ' αυτό φθάνουν ταυτόχρονα δύο απλοί ήχοι). Η συνισταμένη κίνηση εξαρτάται από τις διευθύνσεις, τις συχνότητες, τα πλάτη και τις φάσεις των αρχικών ταλαντώσεων και ο προσδιορισμός της ονομάζεται **σύνθεση ταλαντώσεων**.

Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, της ίδιας διεύθυνσης, της ίδιας συχνότητας που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο.

Έστω ότι ένα σώμα διεγείρετε από δύο αρμονικούς ταλαντωτές, που ταλαντώνονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ω, αλλά διαφορετικά πλάτη A_1 και A_2 και διαφορά φάσης φ. Οι εξισώσεις των απομακρύνσεων των δύο ταλαντώσεων είναι:

$$x_1=A_1\eta\mu\omega t \text{ και } x_2=A_2\eta\mu(\omega t+\varphi)$$

Οι δύο ταλαντώσεις μπορούν να παρασταθούν με τη βοήθεια των αντίστοιχων περιστρεφόμενων διανυσμάτων $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{ON}$.



Αν συνθέσουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{ON}$, προκύπτει ένα νέο διάνυσμα $\overrightarrow{OK}$, του οποίου η προβολή OK_1=x πάνω στον κατακόρυφο άξονα είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των προβολών των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{ON}$.

Δηλαδή είναι: $OK_1= OM_1 + ON_1 \Rightarrow x = x_1 + x_2 \Rightarrow x =A_1\eta\mu\omega t + A_2\eta\mu(\omega t+\varphi)$

Το πλάτος Α υπολογίζεται γεωμετρικά και κάθε στιγμή έχει σταθερό μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \qquad (1)$$

Η γωνία θ υπολογίζεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΔ ή από το τρίγωνο ΟΜΚ (νόμος των ημιτόνων). Δηλαδή:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (2) \qquad \text{και} \qquad \frac{\eta\mu\theta}{A_2} = \frac{\eta\mu(180-\theta)}{A} \quad (3)$$

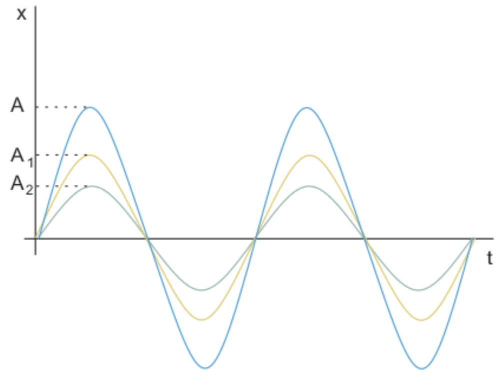
Παρατηρούμε λοιπόν ότι το πλάτος Α, που αντιστοιχεί στο περιστρεφόμενο διάνυσμα διατηρεί σταθερό μέτρο (σχέση 1) και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, αφού ολόκληρο το παραλληλόγραμμο ΟΜΚΝ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω χωρίς να μετασχηματίζεται.

Μπορούμε επομένως να συμπεράνουμε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{OK}$ στον κατακόρυφο άξονα, περιγράφει τη στιγμιαία τιμή της απομάκρυνσης του σώματος, του οποίου η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση και έχει την ίδια κυκλική συχνότητα με τους δύο ταλαντωτές.
Άρα η απομάκρυνση της συνισταμένης ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t+\theta)$ (4)

Επίσης οι σχέσεις (2) και (3) μας πληροφορούν ότι το πλάτος Α της συνισταμένης ταλάντωσης και η φάση θ εξαρτώνται από τα πλάτη A_1 και A_2 των συνιστωσών ταλαντώσεων και από τη διαφορά φάσης φ που υπάρχει ανάμεσά τους.

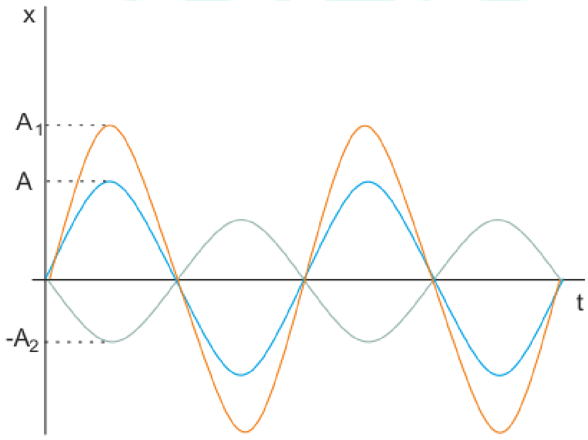
Στην ειδική περίπτωση όπου φ=0 οι εξισώσεις των επιμέρους ταλαντώσεων είναι: $x_1=A_1\eta\mu\omega t$ και $x_2=A_2\eta\mu\omega t$ και της σύνθετης ταλάντωσης $x=A\eta\mu\omega t$ με $A=A_1+A_2$.

Δηλαδή η σύνθετη ταλάντωση έχει ίδια φάση με τις επιμέρους ταλαντώσεις και πλάτος που είναι ίσο με το άθροισμα των πλατών των επιμέρους ταλαντώσεων.



Αν όμως $\varphi=\pi$ τότε οι εξισώσεις των επιμέρους ταλαντώσεων είναι: $x_1=A_1\eta\mu\omega t$ και $x_2=A_2\eta\mu(\omega t+\pi)$
και της σύνθετης ταλάντωσης $x=A\eta\mu\omega t$ αν $A_1>A_2$.
ή $x=A\eta\mu(\omega t+\pi)$ αν $A_2>A_1$. με $A = |A_1 - A_2|$.

Δηλαδή η σύνθετη έχει πλάτος ίσο με το απόλυτο της διαφοράς των πλατών των επιμέρους ταλαντώσεων και παίρνει τη φάση της ταλάντωσης με το μεγαλύτερο πλάτος.



Σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης που γίνονται από το ίδιο σημείο, με το ίδιο πλάτος και διαφορετικές συχνότητες.

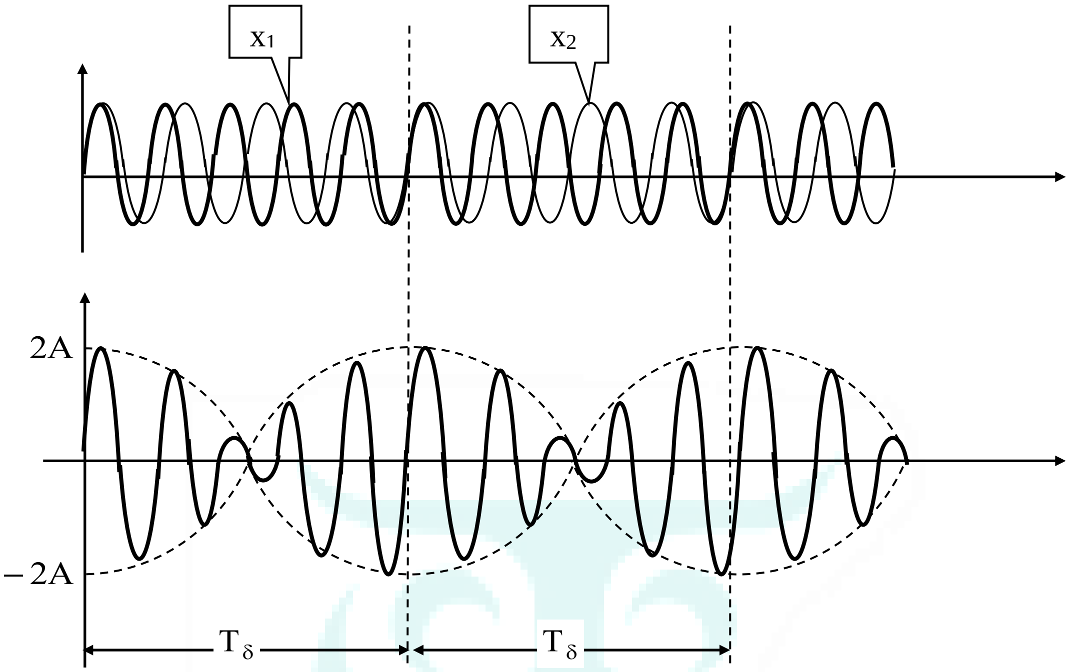
Αν οι εξισώσεις που περιγράφουν τις ταλαντώσεις δίνονται από τις σχέσεις $x_1=A\eta\mu\omega_1 t$ και $x_2=A\eta\mu\omega_2 t$ τότε η εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:
$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = A\eta\mu\omega_1 t + A\eta\mu\omega_2 t \Rightarrow x = A(\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t) \Rightarrow x = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cdot\eta\mu\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$(1)

Από την τελευταία σχέση (1) σχέση προκύπτει ότι η συνισταμένη ταλάντωση είναι κίνηση πολύπλοκη.

Παρατηρώντας την παραπάνω εξίσωση: $x = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cdot\eta\mu\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ συμπεραίνουμε ότι, όταν ($\omega_1\approx\omega_2$) ο παράγοντας $\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t$ μεταβάλλεται πολύ αργά με τον χρόνο σε σχέση με τον παράγοντα $\eta\mu\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ και κατά συνέπεια μπορούμε να επιλέξουμε ως πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης τον παράγοντα: $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cdot$ (2)
Το πλάτος A΄ όπως φαίνεται από την (2) μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο και παίρνει τιμές: $-2A \leq A' \leq 2A$

Επειδή οι κυκλικές συχνότητες διαφέρουν λίγο, είναι: $\overline{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$
οπότε προκύπτει ότι η συνισταμένη ταλάντωση έχει συχνότητα περίπου ίση με τη συχνότητα των συνιστωσών ταλαντώσεων.

Η περιοδική αυτή συνισταμένη κίνηση που περιγράψαμε ονομάζεται **διακρότημα** (σχήμα) Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ των δύο διαδοχικών μεγίστων τιμών του πλάτους ονομάζεται περίοδος T_δ του διακροτήματος.



Η περίοδος του διακροτήματος υπολογίζεται ως εξής:

1ος τρόπος

Κάθε στιγμή οι συνιστώσες ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης:

$\Delta\varphi = \omega_1 t - \omega_2 t \;\Rightarrow\; \Delta\varphi = (\omega_1 - \omega_2)t$

$$\left.\begin{array}{l}\text{για } t = T_\delta \\ \text{έχω } \Delta\varphi = 2\pi\end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi = (\omega_1 - \omega_2)T_\delta$$

$$T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2} \Rightarrow T_\delta = \frac{2\pi}{2\pi f_1-2\pi f_2} \Rightarrow T_\delta = \frac{2\pi}{2\pi(f_1-f_2)} \Rightarrow T_\delta = \frac{1}{f_1-f_2} \Rightarrow f_\delta = f_1 - f_2 \qquad (4)$$

Άρα η συχνότητα του διακροτήματος είναι ίση με τη διαφορά των συχνοτήτων των συνιστωσών ταλαντώσεων.
Επειδή δεν γνωρίζουμε αν $f_1 > f_2$ ή $f_1 < f_2$ τότε ορθότερο είναι να γράψουμε: $f_\delta = |f_1 - f_2|$

2ος τρόπος

Το πλάτος Α μηδενίζεται όταν: $\text{συν}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t_1\right) = 0$

Αυτό συμβαίνει όταν: $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t = (2K+1)\frac{\pi}{2}$ όπου K = 0,1,2,……..

Δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης είναι οι t_1 και t_2 για τις οποίες:

$\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$ και $\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t_2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{3\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$

Η διαφορά $t_2 – t_1$ είναι περίοδος του διακροτήματος

Είναι επομένως: $T_\delta = t_2 - t_1 = \frac{3\pi}{|\omega_1-\omega_2|} - \frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|} = \frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$

ή $T_\delta = \frac{1}{|f_1-f_2|} \Rightarrow \frac{1}{f_\delta} = \frac{1}{|f_1-f_2|}$ και τελικά $f_\delta = |f_1 - f_2|$.