Ρευστά σε κίνηση

Ιδανικό ρευστό - Στρωτή, τυρβώδης ροή

Η ροή ενός ρευστού μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύπλοκη, όπως φαίνεται από τα ρεύματα ενός πλημμυρισμένου ποταμού, ή τις στροβιλιζόμενες φλόγες μιας φωτιάς. Παρόλα αυτά μερικές καταστάσεις μπορούν να εξηγηθούν με απλά εξιδανικευμένα μοντέλα.

Ιδανικό ρευστό ονομάζουμε εκείνο το ρευστό που εκπληρώνει τις παρακάτω τρεις προϋποθέσεις:

α) είναι τελείως **ασυμπίεστο**

β) είναι **απαλλαγμένο δυνάμεων μεταξύ των μορίων τους** (εσωτερική τριβή) και

γ) είναι **απαλλαγμένο δυνάμεων μεταξύ αυτού και των τοιχωμάτων του σωλήνα** μέσα στον οποίο ρέει (δυνάμεις συνάφειας).

Για να διακρίνουμε τα υπαρκτά ρευστά από τα ιδανικά θα τα ονομάζουμε **πραγματικά ρευστά**. Τα πραγματικά ρευστά διαφέρουν λίγο ή πολύ από τη συμπεριφορά των ιδανικών ρευστών.

Διακρίνουμε δύο είδη ροής ρευστών, την **τυρβώδη** και την **στρωτή** ροή.

Στη **τυρβώδη ροή** δεν έχουμε εικόνα μόνιμης κατάστασης αλλά δημιουργία δινών (δινορεύματα = ακανόνιστοι κύκλοι) που απορροφούν μεγάλο μέρος της ενέργειας του ρευστού. Στην τυρβώδη ροή, η ροή διαρκώς αλλάζει. Τυρβώδη ροή παρατηρούμε π.χ. στους καταρράκτες μετά την πτώση του νερού στη λίμνη υποδοχής, στις φλόγες μιας πυρκαγιάς κ.λ.π.

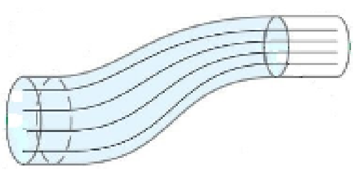
Αν η ροή είναι **ομαλή**, δηλαδή χωρίς τη δημιουργία δινών και σταθερή με το χρόνο, την ονομάζουμε **στρωτή ροή**. Στρωτή ροή παρατηρούμε στη στήλη νερού που σχηματίζεται στη βρύση της κουζίνας μας, όταν είναι ανοιγμένη λίγο.

Στα **ιδανικά** ρευστά συναντάμε **μόνο** στρωτή ροή. Στα πραγματικά ρευστά έχουμε στρωτή ροή όταν οι δυνάμεις εσωτερικής τριβής και οι δυνάμεις συνάφειας έχουν τιμές μικρότερες από κάποιο όριο. Όταν ξεπεραστεί αυτό το όριο η ροή μεταπίπτει σε τυρβώδη.

Όλα όσα ακολουθούν αφορούν τη στρωτή ροή.

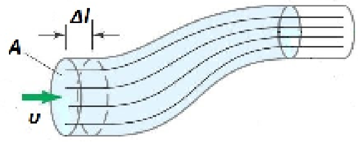
Ρευματική γραμμή – Φλέβα

Ονομάζουμε **ρευματική γραμμή**, τη γραμμή που ορίζεται από το σύνολο των θέσεων (τροχιά) από τις οποίες περνά ένα μόριο του ρευστού στη διάρκεια της κίνησης του. Στη στρωτή ροή που αποτελεί το αντικείμενο της μελέτης μας, κάθε μόριο του ρευστού που διέρχεται από κάποιο σημείο ακολουθεί την ίδια ρευματική γραμμή. Αυτό σημαίνει ότι όταν ένα μόριο του ρευστού διέρχεται από ένα συγκεκριμένο σημείο, έχει την ίδια ταχύτητα που είχε κάθε άλλο μόριο που πέρασε προηγουμένως καθώς και κάθε επόμενο που θα περάσει από το σημείο αυτό. Η διεύθυνση της ταχύτητας κάθε σημείου του ρευστού είναι εφαπτόμενη της ρευματικής γραμμής. Επομένως δύο ρευματικές γραμμές δεν μπορεί να τέμνονται γιατί αλλιώς στο σημείο τομής, το μόριο του ρευστού θα είχε δύο ταχύτητες (καθεμιά εφαπτόμενη της αντίστοιχης γραμμής).



Οι ρευματικές γραμμές που περνούν από το περίγραμμα μιας φανταστικής επιφάνειας Α κάθετης στις ρευματικές γραμμές (βλ. διπλανό σχήμα) σχηματίζουν έναν νοητό σωλήνα που ονομάζεται **φλέβα** ή **σωλήνας ροής**. Από τον ορισμό της ρευματικής γραμμής προκύπτει ότι το ρευστό που κυλάει σε μια φλέβα δεν μπορεί να διασχίσει τα πλευρικά της τοιχώματα και επομένως δεν μπορεί να γίνει ανάμιξη των ρευστών που περιέχονται σε γειτονικές φλέβες. Η πυκνότητα των ρευματικών γραμμών μας δίνει πληροφορίες για την ταχύτητα του υγρού στα διάφορα σημεία. Όσο **πυκνότερες** είναι οι ρευματικές γραμμές τόσο **μεγαλύτερη** είναι η **ταχύτητα** ροής του υγρού.

Παροχή φλέβας



Το διπλανό σχήμα δείχνει τη ροή ενός ρευστού μέσα από κάποιο σωλήνα. Σε κάποια θέση ο σωλήνας έχει διατομή Α και το ρευστό ρέει με ταχύτητα υ. Έτσι, στο στοιχειώδες χρονικό διάστημα Δt, το ρευστό διανύει απόσταση $\Delta l = \upsilon \Delta t$ και από τη διατομή διέρχεται όγκος ρευστού ίσος με $\Delta V = A\Delta l = A\upsilon\Delta t$.

Ορίζουμε ως **παροχή** της φλέβας ή του σωλήνα, Π, το φυσικό μέγεθος που ισούται με το πηλίκο του όγκου του ρευστού που διέρχεται από μια διατομή προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα, δηλαδή $\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A\Delta l}{\Delta t}$ ή $\Pi = A\upsilon$.

☆ με μονάδα στο S.I. το $1m^3/s$.

Διατήρηση ύλης – Εξίσωση συνέχειας

Το σχήμα δείχνει τμήμα μιας φλέβας μεταξύ δύο σταθερών διατομών με εμβαδά A_1 και A_2 ($A_1 > A_2$).

Ο ρυθμός ροής μάζας ισούται με τη μάζα Δm του ρευστού που διέρχεται από μία διατομή, δια του αντίστοιχου χρόνου Δt : $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t}$ **(1)**

Ο όγκος του ρευστού που διέρχεται από τη διατομή A_1 σε χρονικό διάστημα Δt είναι $A_1\Delta l_1$, όπου Δl_1 η απόσταση που διανύει το ρευστό στο χρόνο Δt. Επειδή η ταχύτητα του ρευστού είναι $\upsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{\Delta t}$, ο ρυθμός ροής της μάζας από την διατομή A_1 γίνεται: $\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1 A_1 \Delta l_1}{\Delta t} = \rho_1 A_1 \upsilon_1$ **(2)**

Στο εσωτερικό της φλέβας δεν υπάρχουν ούτε πηγές που να παράγουν ρευστό, ούτε καταβόθρες που να απορροφούν ρευστό. Άρα, η μάζα ρευστού που διέρχεται από τη διατομή A_1 σε χρονικό διάστημα Δt είναι ίση με τη μάζα που εκρέει από τη διατομή A_2 στον ίδιο χρονικό διάστημα, δηλαδή ισχύει **η αρχή διατήρησης της ύλης**. Άρα, σύμφωνα με την **αρχή διατήρησης της ύλης** μπορούμε να γράψουμε: $\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \Rightarrow$ $\rho_1 A_1 \upsilon_1 = \rho_2 A_2 \upsilon_2$ **(3)**

Αν το ρευστό είναι ιδανικό, είναι ασυμπίεστο, οπότε ισχύει $\rho_1 = \rho_2$ και η σχέση **(3)** παίρνει τη μορφή: $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ ή $\Pi = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$ **(4)**

Η τελευταία σχέση ονομάζεται **εξίσωση της συνέχειας** είναι άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ύλης και διατυπώνεται ως εξής: **Κατά μήκος μιας φλέβας ή ενός σωλήνα η παροχή διατηρείται σταθερή.**

Η εξίσωση **(4)** υποδεικνύει ότι αν η επιφάνεια διατομής είναι μεγάλη, η ταχύτητα ροής είναι μικρή και αντίστροφα, όταν η επιφάνεια είναι μικρή η ταχύτητα είναι μεγάλη. Σαν παράδειγμα μπορούμε να αναλογιστούμε την κατακόρυφη στήλη νερού που δημιουργείται στην βρύση της κουζίνας μας όταν έχουμε στρωτή ροή (βλέπε σχήματα). Καθώς το νερό εξέρχεται επιταχύνεται λόγω βαρύτητας με συνέπεια να αυξάνεται διαρκώς η ταχύτητα ροής του. Για να διατηρείται η παροχή σταθερή κατά μήκος της στήλης νερού που σχηματίζεται, ελαττώνεται διαρκώς η κάθετη διατομή της. Έτσι η διατομή της στήλης στο σημείο Β του σχήματος είναι μικρότερη από ότι στο Α γιατί το νερό εκεί κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η ροή ενός ποταμού σταθερού πλάτους και μεταβλητού βάθους. Όταν το ποτάμι βαθαίνει αυξάνεται η εγκάρσια διατομή του Α με συνέπεια η ροή του να είναι αργή, ενώ όταν το ποτάμι γίνεται ρηχό ελαττώνεται η εγκάρσια διατομή του Α με συνέπεια η ροή του να γίνεται γρήγορη.

Από τα παραπάνω, παραστατικά μπορούμε να πούμε ότι:

όπου πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές η ταχύτητα ροής είναι πιο μεγάλη.

Η μηχανική ενέργεια στα ρευστά

Για να περιγράψουμε ενεργειακά τα ρευστά εισάγουμε τα φυσικά μεγέθη: δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού, κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού, μηχανική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού και έργο δύναμης ανά μονάδα όγκου του ρευστού.

Δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού: $\frac{U}{\Delta V}=\frac{mgh}{\Delta V}=\rho g h$

Κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού: $\frac{K}{\Delta V}=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\Delta V}=\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$

Έργο δύναμης ανά μονάδα όγκου του ρευστού: $\frac{W}{\Delta V}=\frac{F\cdot\Delta x}{\Delta V}=\frac{F_1\Delta x-F_2\Delta x}{\Delta V}=\frac{(p_1-p_2)A\cdot\Delta x}{\Delta V}=p_1-p_2$

Η εξίσωση του Bernoulli

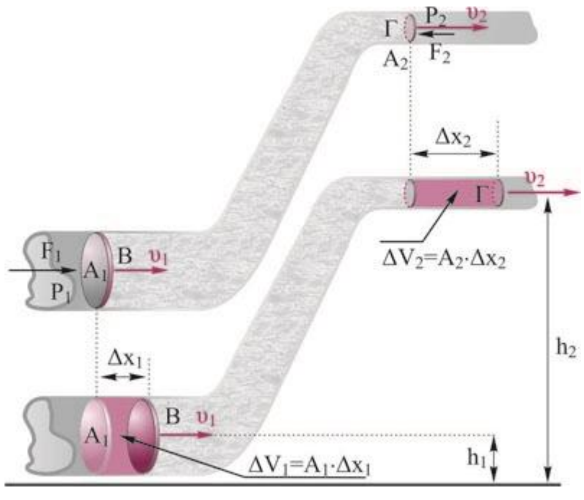
Γνωρίζουμε ότι η πίεση σε ένα ρευστό που ρέει σε σωλήνα συνήθως δεν είναι ίδια σε δύο σημεία του όταν αυτά βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος. Η πίεση για παράδειγμα στους σωλήνες των υψηλότερων ορόφων σε μια πολυκατοικία είναι μικρότερη αυτής του ισογείου. Γνωρίζουμε επίσης, από το νόμο της συνέχειας, ότι η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται ανάλογα με τη διατομή του σωλήνα στον οποίο ρέει. Το 1738 ο Daniel Bernoulli βρήκε τη σχέση που συνδυάζει την πίεση σε ένα σημείο του υγρού με την ταχύτητά του και το ύψος.

Η **εξίσωση του Bernoulli** είναι μια συνέπεια της αρχής **διατήρησης της ενέργειας** στα ρευστά και διατυπώνεται ως εξής:

Το άθροισμα της πίεσης p, της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του ρευστού $\rho g h$, έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο μιας ρευματικής γραμμής.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon^2+p+\rho g h=\sigma\tau\alpha\theta.$$

Απόδειξη



Θεωρούμε ένα ιδανικό (ασυμπίεστο) ρευστό το οποίο ρέει σε πλάγιο σωλήνα μεταβλητής διατομής. Διαλέγουμε δύο σημεία Β και Γ που είναι σημεία της ίδιας ρευματικής γραμμής τα οποία βρίσκονται σε ύψη h_1 και h_2 από το έδαφος αντίστοιχα. Η πίεση στο Β είναι p_1 και στο σημείο αυτό η διατομή του σωλήνα είναι A_1 ενώ στο Γ, p_2 και A_2 ($A_2< A_1$) αντίστοιχα. Θεωρούμε σαν σύστημα το τμήμα του ρευστού μεταξύ των Β και Γ και ότι αυτό ρέει από το Β προς το Γ. Επειδή η διατομή του σωλήνα από το Β προς το Γ μειώνεται, σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας η ταχύτητα του ρευστού αυξάνεται, άρα το ρευστό επιταχύνεται με τη βοήθεια μιας δύναμης που ασκείται σε αυτό από το περιβάλλον του.

Σε χρονικό διάστημα Δt ένα στοιχειώδες τμήμα μάζας Δm του ρευστού μετατοπίζεται από το Β προς το Γ. Εφαρμόζουμε για το Δm το θεώρημα έργου ενέργειας (ΘΕΕ): $K_\Gamma-K_B=W_{F_{\varepsilon\xi}}+W_w$,όπου $W_{F\varepsilon\xi}$ είναι το έργο που προσφέρεται στο τμήμα του ρευστού που περιέχεται μεταξύ των διατομών A_1 και A_2. Στο τμήμα του ρευστού μεταξύ των διατομών A_1 και A_2 ασκούνται δύο δυνάμεις από το περιβάλλον ρευστό. Στη διατομή A_1 ασκείται η δύναμη F_1 της οποίας το έργο είναι θετικό και στη διατομή A_2 ασκείται η δύναμη F_2 της οποίας το έργο είναι αρνητικό, δηλαδή :

$$W_{F_{\varepsilon\xi}}=F_1\,\Delta x_1-F_2\,\Delta x_2=\ p_1A\Delta x_1-p_2A\Delta x_2 \quad ή \quad W_{F_{\varepsilon\xi}}=\ p_1\Delta V_1-p_2\Delta V_2\ .$$

Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο : $\Delta V_1=\Delta V_2=\Delta V$. Και η παραπάνω σχέση γίνεται: $W_{F_{\varepsilon\xi}}=\ (p_1-p_2)\Delta V$.

Το έργο του βάρους είναι $W_{w(B\to\Gamma)}=U_B-U_\Gamma=-\Delta m g(h_2-h_1)$ και είναι αρνητικό αφού η στοιχειώδης μάζα Δm κατά τη μετακίνησή της από το Β στο Γ ανεβαίνει.

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε: $\frac{1}{2}\Delta m\upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2}\Delta m\upsilon_B^2 = (p_1 - p_2)\Delta V - \Delta mg(h_2 - h_1) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V}\upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V}\upsilon_B^2 = (p_1 - p_2) - \frac{\rho\Delta m}{\Delta V}g(h_2 - h_1) \Rightarrow \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + p_2 + \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_1 + \rho g h_1$$

Επομένως για οποιοδήποτε σημείο ενός ιδανικού ρευστού ισχύει: $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + p + \rho g h = \sigma\tau\alpha\theta.$ που αποτελεί την **εξίσωση** του **Bernoulli**.

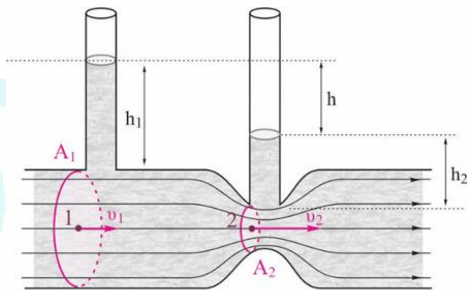
Η παραπάνω εξίσωση όπως είδαμε αποτελεί μια έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στα ρευστά. Η εξίσωση του Bernoulli ισχύει κάτω από τις εξής **προϋποθέσεις**:

- Το **ρευστό** είναι **ασυμπίεστο**,
- Οι **τριβές** μεταξύ του ρευστού και των τοιχωμάτων του σωλήνα είναι **αμελητέες**,
- Η **ροή** είναι **στρωτή**.

Η εξίσωση Bernoulli σε οριζόντιο σωλήνα.

Σε οριζόντιο σωλήνα, έστω και αν υπάρχουν στενώσεις, κατά τη μετακίνηση του ρευστού θεωρούμε ότι δεν υπάρχει έργο βάρους και η εξίσωση παίρνει τη μορφή: $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + p = \sigma\tau\alpha\theta.$

Το παραπάνω μας δείχνει ότι όπου η ταχύτητα του ρευστού αυξάνεται (στένωση σωλήνα και αύξηση πυκνότητας ρευματικών γραμμών), η πίεση ελαττώνεται και αντίστροφα. Στο σχήμα, παρατηρούμε ότι εφόσον $A_1 > A_2$, έχουμε $\upsilon_1 < \upsilon_2$ και $p_1 > p_2$.



Σχόλια για την εφαρμογή του νόμου του BERNOULLI

- Σε ένα ακίνητο ρευστό οι προϋποθέσεις εφαρμογής του νόμου του **Bernoulli** ισχύουν, άρα ο νόμος **εφαρμόζεται και σε ακίνητα ρευστά.**
- **Σε** μια **οριζόντια φλέβα** ανεξάρτητα από στενώσεις θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια του ρευστού δεν μεταβάλλεται, οπότε ο όρος **ρgh** παραμένει **σταθερός**.
- Στον όρο <u>ρgh, το h εκφράζει το ύψος της στοιχειώδους μάζας από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας</u>, ενώ στον τύπο της υδροστατικής πίεσης, <u>p=ρgh, το h δηλώνει βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού</u>.
- Ένα ρευστό που ρέει σε σωλήνα, μόλις εξέλθει στην ατμόσφαιρα θεωρούμε ότι έχει πίεση ίση με την ατμοσφαιρική, $p_{\alpha\tau\mu}$.
- Ο νόμος του **Bernoulli** εφαρμόζεται **και** στα **αέρια**.
- Τα φαινόμενα ροής γύρω από ένα σώμα είναι ίδια είτε το σώμα κινείται και το ρευστό ηρεμεί, είτε το σώμα ηρεμεί και το ρευστό κινείται με αντίθετη ταχύτητα. Κατά την εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli, όταν έχουμε εμπόδιο που κινείται μέσα σε ακίνητο ρευστό (π.χ. αεροπλάνο), η ταχύτητα που υπεισέρχεται στον τύπο είναι η σχετική ταχύτητα του ρευστού ως προς το εμπόδιο. Δηλαδή, <u>την εξίσωση του Bernoulli την γράφει ο παρατηρητής που βρίσκεται πάνω στο εμπόδιο</u>.

Θεώρημα Torricelli

Ένα ανοικτό δοχείο περιέχει υγρό. Σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού υπάρχει μικρή τρύπα από την οποία το υγρό βγαίνει με ταχύτητα υ. Με εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli μεταξύ του σημείου Α της ελεύθερης επιφάνειας και του σημείου Β , που ανήκουν στην ίδια ρευματική φλέβα, υπολογίζεται η ταχύτητα εκροής υ από το σημείο Β. Βρίσκεται ότι είναι ίση με αυτήν που θα είχε αν αφηνόταν να πέσει ελεύθερα από το ίδιο ύψος, δηλαδή $\upsilon = \sqrt{2gh}$. Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως **θεώρημα Torricelli**.